

# 高精地圖標準及智能移動測繪技術發展工作案(109-110)

## High Definition Map Standard and Intelligent Mobile Mapping Technology Development Project (109-110)

主管單位：內政部地政司

江凱偉 <sup>1</sup>	曾義星 <sup>1</sup>	莊智清 <sup>2</sup>	洪榮宏 <sup>1</sup>
Kai-Wei Chiang <sup>1</sup>	Yi-Hsing Tseng <sup>1</sup>	Jyh-Chin Juang <sup>2</sup>	Jung-Hong Hong <sup>1</sup>
郭重言 <sup>1</sup>	王驥魁 <sup>1</sup>	呂學展 <sup>1</sup>	郭佩茶 <sup>1</sup>
Chung-Yen Kuo <sup>1</sup>	Chi-Kuei Wang <sup>1</sup>	Hsueh-Chan Lu <sup>1</sup>	Pei-Fen Kuo <sup>1</sup>

<sup>1</sup> 國立成功大學測量及空間資訊學系

<sup>2</sup> 國立成功大學電機工程學系

### 摘要

測繪與空間資訊相關應用領域，由於移動測繪系統的機動性、多元感測資訊以及對數位影像處理與蒐集的能力，可以明顯節省過去傳統測量所需要的人力及時間。故除了傳統的空間資訊與測繪應用以外，隨著移動裝置的普及、無人載具的發展與自駕車技術的研究，預期結合現有移動測繪技術、室內圖資建置技術、物聯網空間資訊應用將有效支撐適地性服務急速擴張的需求，這對深化空間資訊領域產業的發展有正面的助益。另一方面，隨著智慧型運輸系統的發展，自動駕駛汽車成為未來全新的交通方式。自駕車用地圖在自駕車運行具有不可或缺之地位，提供自駕車決策系統輔助，降低技術門檻及所需經費，並且提升安全性。國內已累積多年發展與應用車載移動製圖技術之經驗，並具備成熟的資料處理技術，惟對於產製自駕車用高精地圖並無統一標準製作程序、精度規範與地圖格式，恐會造成廠商格式不相符無法流通，導致重複資源投入並衍生行車安全與國安議題。

本團隊在內政部支持下持續推動高精地圖標準及智能移動測繪技術發展，包含下列與新一代測繪技術相關之議題。建立高精地圖標準及指引項目中，持續修正高精地圖圖資內容標準、製圖作業指引及驗證流程指引，建立自駕車用動態地圖之圖資內容標準(草案)、作業指引(草案)及更新驗證指引(草案)。發展高精地圖自動化生產及群眾外包製圖技術項目中，發展高精地圖自動化生產技術，開發自動化工具，建立自駕車群眾外包之高精地圖製圖(含自駕車平台)系統及流程，並確定製圖系統符合動態更新使用。發展移動裝置室內外智慧製圖技術項目中，研發應用人工智慧技術之室內外影像匹配輔助行人慣性導航定位技術。高精地圖國際事務推動項目中，參與國際自駕車相關組織活動，持續研提或協助引進國外產製高精地圖之多平台製圖技術，推廣我國高精地圖相關事宜。

**關鍵詞：**高精地圖、群眾外包、行人慣導定位、人工智慧

## Abstract

In the application related to surveying and mapping, the mobile mapping systems can significantly save the workforce and time required. Based on hardware improvements, mobile sensors are becoming more diverse, smaller, and cheaper, while the accuracy is improving. On the other hand, with intelligent transportation systems, autonomous vehicles have become a new way of transportation in the future. The map for autonomous vehicles is indispensable in the operation of autonomous vehicles. It assists in autonomous vehicle decision-making systems and lowers the technical threshold. High-definition maps (HD maps) for autonomous vehicles mainly rely on the onboard sensors to obtain point clouds and images and is produced through feature extraction and manual assistance methods. However, if there is no unified standard production process, specification, and map formats for producing HD maps for autonomous vehicles, it may cause inconsistent format issues, resulting in unnecessary resource investment and safety issues of autonomous vehicles.

This team has promoted the development of HD map standards and mobile mapping technology with the Ministry of the Interior's support and has achieved significant results. It is expected that this project can continue to explore the existing results further and promote them to the application side, including the following and new issues related to the next generation of surveying and mapping technology. In establishing HD map standards and guidance projects, continue to revise the high-precision map standards, mapping guidelines, and verification process guidelines. Meanwhile, the drafts of dynamic map standards, production guidelines for dynamic maps, and the verification and update guidelines of dynamic maps for autonomous vehicles will be proposed in this project. In developing automated HD map production and crowdsourcing mapping technology projects, develop automated HD map production technology, develop automated mapping tools, and establish certified crowdsourcing of HD map updates systems and procedures. In developing indoor and outdoor intelligent mapping technology for mobile devices, research and development of indoor and outdoor image matching assisted pedestrian inertial navigation technology using artificial intelligence technology. In the HD map international affairs promotion project, participate in international self-driving-related organizations, continue to research or assist in introducing international HD map technology, and promoting Taiwan's HD map developments.

**Keywords : Mobile mapping system, High definition map, Crowdsourcing, Pedestrian inertial navigation indoor positioning, Artificial intelligence**

## 一、前言

配合國家科技發展重點政策，落實測繪及空間資訊科技自主化，內政部地政司於民國 101 年至 107 年先後執行「多平台製圖技術工作案」與「移動載台測量製圖技術發展工作案」，在國內既有測繪技術基礎上，擴大各項測繪相關技術之本土研發面向，並深化自主性研究能量，厚植測繪軟硬體實力，最終目的乃在輔助國家經濟建設與社會貢獻產出。藉由辦理相關成果發表會議及協助推動國際測繪合作事務，以擴大空間測繪技術流通應用，並以科學外交形式輔助國際事務媒合，以期於本案研究推動下培養國內科技專業人力累積移動測繪之技術能量，同時協助我國產業轉型技術服務輸出營利模式，帶動整體空間資訊產業之創新與發展。

隨著智慧型運輸系統(Intelligent Transport System, ITS)的發展，自動駕駛汽車成為未來全新的交通方式。我國因具備車電產業基礎且感測系統供應鏈完備，極具發展自動駕駛技術車輛潛力；為因應世界發展自駕車潮流，我國也積極研發自駕車相關「感知」、「決策」、「控制」關鍵技術，期盼能逐步實現自駕系統國產化願景，促使臺灣成為全球自動駕駛次系統關鍵產業鏈及服務技術輸出國，其中自駕車用地圖或稱高精地圖在自駕車運行具有不可或缺之地位，高精地圖的資料包含豐富且準確的場景語義資訊、即時路況資訊及駕駛經驗訊息用以輔助環境感知、車輛定位與規劃控制，實現當前情況下最優駕駛策略，提供自駕車決策系統輔助，降低技術門檻及所需經費，並且提升安全性。

易言之，本案除基於「108 年度自駕車用地圖標準及移動測繪技術發展工作案」既有延續研究工項外，將持續探討自駕車用動態高精地圖標準、利用人工智慧精進自駕車用地圖製圖技術、建置自駕車用地圖圖資管理及供應機制、提升自駕車定位精度、進行高精地圖檢核及品質管控、發展室內外智慧化製圖技術，期望透過本工作案完成高精地圖標準及作業流程指引、發展高精地圖自動化生產及群眾外包製圖技術、高精地圖國際事務推動、發展移動裝置室內外智慧製圖技術，以提升自駕車用高精地圖產製的效率及正確性，同時及早制定標準有助於我國自駕車用高精地圖之產業規格統一，達到資源共享的願景，更藉由本案持續參與世界自駕車的相關國際組織，進一步確保本案所建立之高精地圖地圖標準符合實際需求並與國際接軌，以利我國產業及早進行自駕車測試及前瞻技術布局，未來政府單位評估組建國家級圖資產業聯盟具有正面助益。

## 二、研究地區與研究方法

本案工作項目可分為「自駕車群眾外包之高精地圖製圖技術」以及「移動裝置室內外智慧製圖技術發展」兩大部分。首先，「自駕車群眾外包之高精地圖製圖技術」即透過整合來自多台自駕車分別運行於不同路線的物件偵測結果，來提升高精地圖變異物件辨識的準確率，並於臺南沙崙地區進行適地性服務案例試辦；再者，「移動裝置室內外智慧製圖技術發展」研發應用人工智慧技術之室內外影像匹配輔助行人慣性導航定位技術，結合現有多平台移動測繪技術、室內圖資建置技術、物聯網、穿戴裝置等，

組成綿密的空間資訊應用網格，提升室內定位成果，也基於此定位技術開發更完善的適地性服務。

## 2.1 自駕車群眾外包之高精地圖製圖技術

自駕車群眾外包即透過整合來自多台自駕車分別運行於不同路線的物件偵測結果，來提升高精地圖變異物件辨識的準確率。具體而言，可藉由自駕車收集到的感知資訊進行自動化的物件偵測，並與已建置的靜態高精地圖進行比較以達到變異物件辨識的目的。然而，由於感測器觀測視野、物體遮蔽及物件偵測演算法的限制，單一自駕車無法完整且準確地偵測道路上所有的目標物件，而導致錯誤的變異物件辨識結果，也因此本案引入群眾外包技術來克服上述問題，圖 1 所示為自駕車群眾外包進行高精地圖變異物件辨識及更新之流程。

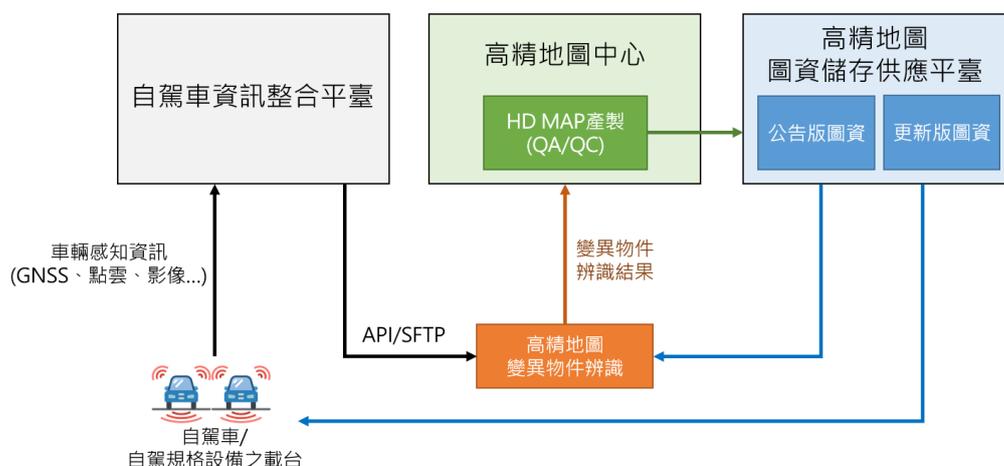


圖 1、靜態高精地圖變異物件辨識及更新流程

目前自駕車的感知資訊主要為影像及光達點雲，其中點雲雖然可提供目標物件的三維坐標以及強度值資訊，但由於點雲密度較為稀疏，因此不足以識別所有的目標物；另一方面，影像雖然具備光達所缺少的視覺屬性而可以進行物件的辨識與分類，但卻無法提供準確的三維坐標訊息。因此，本案採用結合影像及點雲的處理結果，藉由融合兩者的優點達到物件辨識及變異偵測的目的。

在高精地圖中，物件變異事件可分成四種：新增、移除、移動、無變異，其中移動可視為移除後新增的物件，因此本案僅將物件變異情形區分成新增、移除和無變異三類，如圖 2 所示，而三者的比較如表 1 所示。對於新增事件，單一自駕車的物件偵測結果會與高精地圖中所有目標物件進行比較，當以偵測結果為中心的一定範圍內無目標物件時，則判定該偵測結果為新增的物件，反之則表示該物件已存在於地圖中，因此判定無變異。由於利用自駕車等級之感測器量測的結果並不精確，因此可利用 Distance-based Clustering 演算法合併來自多輛自駕車的物件辨識結果以提升量測精度 (Jo et al., 2018)，如圖 3 所示，也有學者利用分層式的 Spectral Clustering (Von Luxburg, 2007) 先獲得物件總數量，再以 K-means 合併辨識結果 (Dabeer, et al., 2017)。因此，本案擬以投票方式進一步確認該新增物件的可信度，只有當物件成功被偵測與未被偵測的次數比例大於門檻值時，演算法才會判定該物件確實屬於新增的物件。

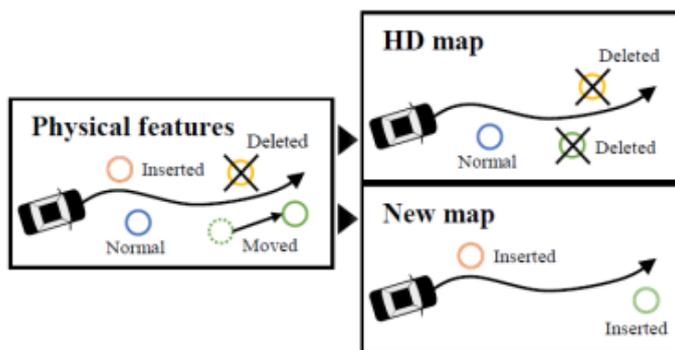


圖 2、物件變異情形分類示意圖(摘錄自 Jo et al., 2018)

表 1、變異物件辨識中的新增、移除、無變異事件比較表

事件種類	新增	移除	無變異
比較物件	高精地圖中所有目標物件	高精地圖中車輛行經之目標物件	
資料需求	<ol style="list-style-type: none"> <li>物件偵測結果</li> <li>高精地圖</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>物件偵測結果</li> <li>高精地圖</li> <li>車輛行駛路徑</li> </ol>	

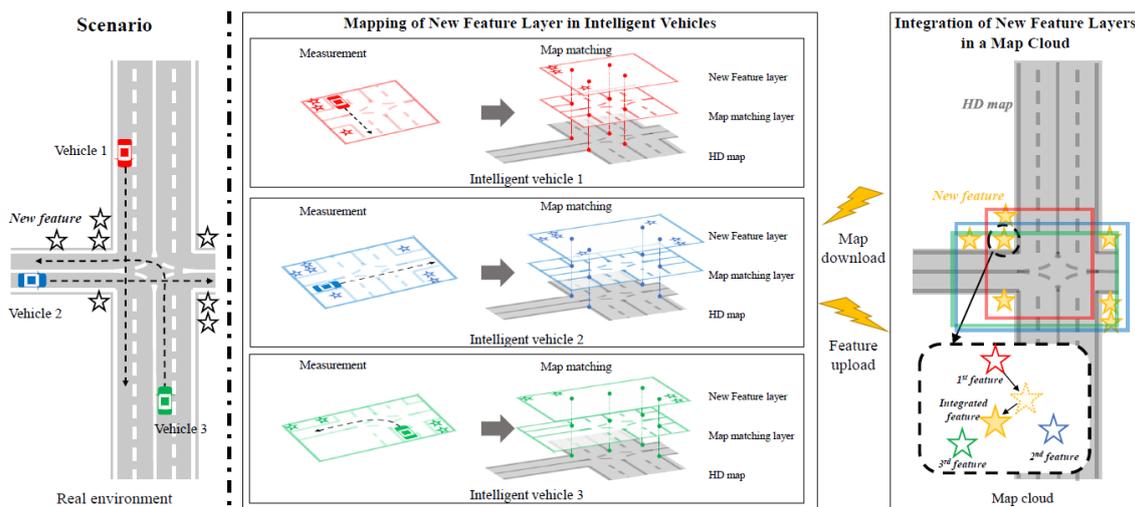


圖 3、整合多自駕車變異物件辨識成果之示意圖(摘錄自 Jo et al., 2018)

對於移除事件，由於自駕車的感知範圍有限，因此需先從高精地圖中提取出行駛路線周遭的目標物件做為比對項目，當蒐集的目標物件與物件偵測結果距離小於門檻值時，判定為無變異，否則該目標物件為移除物件。接著，多輛自駕車的變異物件辨識結果將進行投票，只有當移除與無變異的次數比例大於門檻值時，該目標物件才會被判定為移除物件。

## 2.2 移動裝置室內外智慧製圖技術發展

定位技術大致可分為航位推算、無線訊號定位、特徵匹配以及影像定位，各自技術皆有其缺點。航位推算技術會隨著使用時間增加持續累積誤差，造成最後的定位精度不佳；無線訊號定位在大規模的複雜空間中，會因為訊號容易受到干擾阻擋等不穩定因素，導致定位精度不盡理想；特徵匹配雖有不錯的定位精度，但其缺點在於需要

大量特徵數據庫及有效篩選特徵點之方法，龐大的計算量會使得室內外定位服務難以實現即時性；影像定位技術是透過幾何原理解算相機與影像已知坐標的相對關係，進而取得相機位置，相對於其它三種定位技術，影像定位的影像資料容易取得。然而影像室內定位技術仍需要高規格的硬體以支援耗時的匹配、特徵萃取和後方交會計算。

深度類神經網路在過去幾年之發展中，有大量成功透過網路大數據進行學習之類神經網路，本案透過這些已建置類神經網路的預測，除了自動化偵測製圖之物件屬性，也可將影像紋理圖資整合光達室內製圖系統，類神經網路如卷積神經網路(Convolution Neural Network, CNN)、循環神經網路(Recurrent Neural Network, RNN)等方式對於影像識別上皆有所貢獻，尤其以卷積神經網路為最有名的方法，其優勢在於可針對局部區域提取高分辨率的特徵點，藉由這些特徵點作為人類的視覺基礎，使識別錯誤率有效降低。Kendall 等人在 2015 年使用室內以及室外資料庫進行學習與測試，該法可預測相機六自由度(位置與姿態)，該法提出一種名為 PoseNet 之卷積神經網路架構，屬於監督式學習，其架構參考 Szegedy 等人(2015)提出的 GoogLeNet 深度神經網路，必須利用特殊方法獲取可靠值以做為答案訓練類神經網路。本案使用 PoseNet 之類神經網路測試室內定位系統的精度，並且針對適地性服務試辦區域之故宮南院展區選用室內移動製圖平台來採集更多實驗場域相關環境之數據庫，實際流程架構如圖 4 所示。

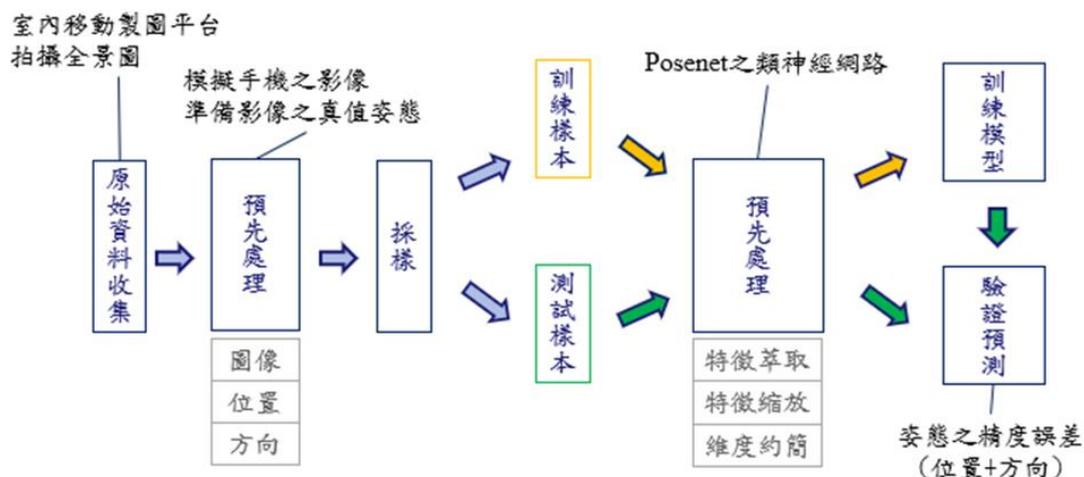


圖 4、作業流程架構圖

本案亦進一步針對影像前處理格式、調整損失函數前後、搭配轉移學習這三種去設計不同參數與影像尺寸，評估對於類神經網路最終之中值誤差結果。以下說明各種影像尺寸的設置，每個字符代表不同意思：M 為本案使用的 PoseNet 模型架構；L 為使用預訓練模型。影像前處理格式分為 C(訓練階段前將影像先縮放至 455x256 像素，再中心裁切成 244x224 像素當作輸入值)、R(將影像直接縮放至 224x224 像素當作輸入值)、N(將影像縮放至 NxN 像素當作輸入值，範圍從 100 至 400)。損失函數分為 PO 和 P，PO 代表損失函數計算位置和方向損失，P 代表僅計算位置損失。

- $M_{C+PO+L}$ ：原始 PoseNet 論文設置，影像先縮再切成 224x224 像素，損失函數計算位置及方向損失，加載預訓練模型。
- $M_{R+PO+L}$ ：更動影像預處理，影像直接縮放成 224x224 像素。

- $M_{C+P+L}$ ：更動損失函數，僅計算位置損失。
- $M_{R+P+L}$ ：影像預處理及損失函數皆更動。
- $N \times N$ ：影像預處理直接縮放成  $N \times N$  像素，其中  $N$  為矩形影像邊長，範圍從 100 至 400。

### 三、研究成果

#### 3.1 自駕車群眾外包之高精地圖製圖技術適地性服務案例試辦

本案規劃高精地圖群眾外包試辦區位於臺南沙崙地區，其位置及規劃路線如圖 5 所示，於區塊 1 及區塊 2 分別運行 4 圈收集感測資料，以模擬群眾外包情境，驗證本案建立之自駕車群眾外包系統及流程，並確定此系統符合動態更新使用。實驗車之硬體規格如圖 6 及表 2 所示。



圖5、適地性服務之群眾外包運行規劃路線圖



圖6、實驗車感測器實景圖

表2、109年度適地性服務之實驗車硬體規格

項目	硬體名稱	說明
光達	Velodyne VLP-16	16 線光達
相機	MYNT-EYE D1000-50	1. 影像解析度：640 x 480 2. 像元尺寸：3.75 $\mu\text{m}$ 3. 焦距：2.45 mm
GNSS/IMU	Pwrpak 7	1. RTK 定位 2. 戰術等級 IMU

目前，實驗車已於國立成功大學歸仁校區之室外率定場完成率定資料收集，亦完成於適地性服務試辦區 GNSS、影像與點雲資料蒐集，並藉由多次運行於試辦區路線以模擬群眾外包情境。進一步於完成感測器率定作業後，將執行本案開發之物件偵測演算法，進行上述感知資訊分析，偵測之目標類別物件包含紅綠燈、行人穿越燈、限制標誌、禁止標誌、警告標誌、指向線等六類，透過比對既有的高精地圖，進行群眾外包之變異物件辨識。圖 7 所示為偵測成果範例，各偵測類別精度成果如表 3 所示。

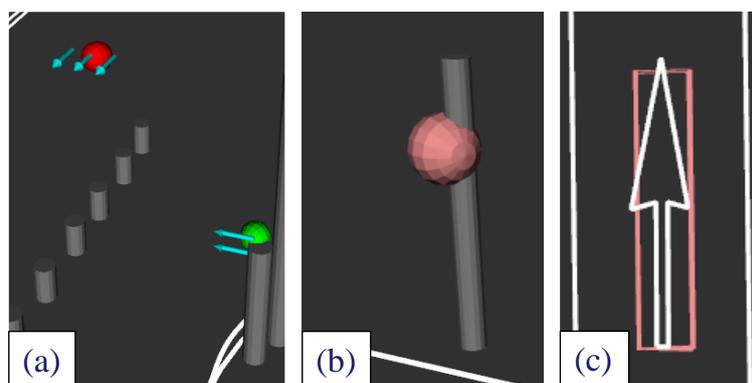


圖 7、物件偵測成果範例：(a)交通號誌、(b)交通標誌牌、(c)指向線

表3、偵測類別精度

類別	Precision (%)	Recall (%)
紅綠燈	99.3	65.3
行人穿越燈	70.7	27.4
限制標誌	68.9	87.5
禁止標誌	100.0	50.0
警告標誌	100.0	84.1
指向線	98.0	67.4

### 3.2 移動裝置室內外智慧製圖技術適地性服務案例試辦

為驗證本案所提出之人工智慧技術之室內影像匹配輔助行人慣導定位技術效能，本案使用開發之程式將移動製圖平台所拍攝之全景影像圖模擬成手機視角之影像，完成數據樣本之影像、位置及方向角度後，採樣樣本分成訓練樣本及測試樣本，每張影像再根據實驗的不同設置輸入類神經網路並且加以測試誤差精度。本案之硬體設備將使用單顆 GeForce GTX 1080 Ti 之 GPU 顯示卡加快類神經網路運行訓練與測試，於適地性服務試辦區域之故宮南院展區進行測試，訓練迭代次數設置 30,000 次，模型依不同參數與影像尺寸所需的訓練時間不同，每張影像測試需要 0.2 秒。

此外，為使訓練過程加速收斂，幫助類神經網路快速學習局部特徵，本案採用轉移學習為基礎加載預訓練模型。並針對影像前處理格式、調整損失函數前後與搭配轉移學習這三種去設計不同參數與影像尺寸對於類神經網路最終之中值誤差結果。實驗結果如圖 8 及圖 9 所示。圖 8 為在有加載預訓練模型且影像尺寸皆為 224x224 像素的前提下，不同參數設置之位置中值誤差結果。從圖中可得知原始 PoseNet 論文設置 ( $M_{C+PO+L}$ ) 的位置中值誤差為 5.26 公尺，而更動影像預處理與損失函數方法 ( $M_{R+P+L}$ ) 的

位置中值誤差為 0.42 公尺，與原始 PoseNet 論文設置相比， $M_{R+P+L}$  方法的整體精度獲得大大地提升。圖 9 為在沒有加載預訓練模型的前提下，影像前處理直接縮放  $N \times N$  像素當作輸入值，類神經網路之位置中值誤差結果。橘色長條代表每張測試影像的位置誤差在 1 公尺以內占整個測試集的比率，黃色長條則是誤差在 0.5 公尺以內的比率。從結果來看，雖然影像尺寸越大，其中值誤差有趨緩下降，不過相對的，所需的模型訓練時間也越長。因此整體而言，對於故宮南院之數據集來說，在沒有預訓練模型輔助的情況下，影像尺寸大小對於整體精度沒有太大差別。

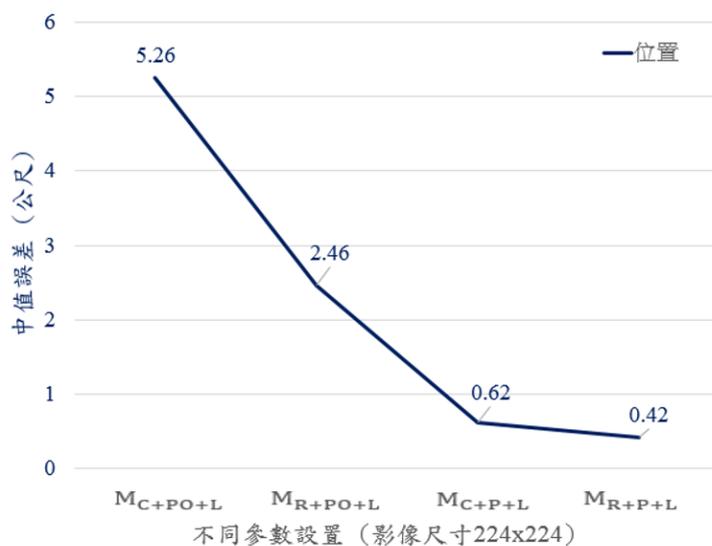


圖 8、不同參數設置之中值誤差結果(有預訓練模型)

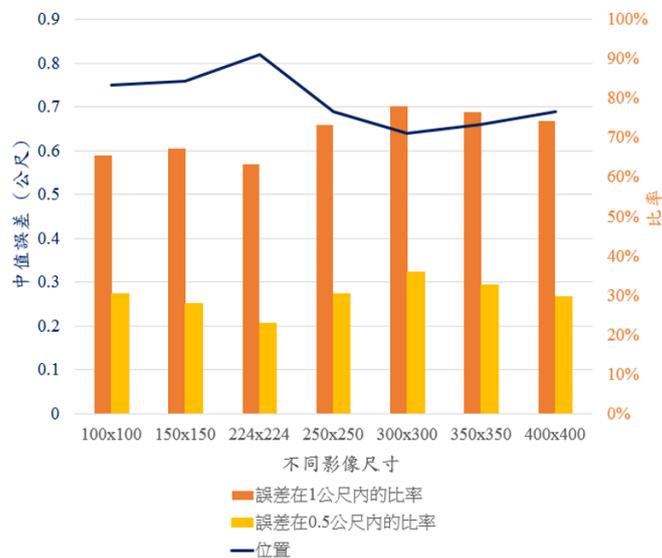


圖 9、不同影像尺寸之中值誤差結果(直接縮，無預訓練模型)

上述實驗結果已得知在同條件下， $M_{R+P+L}$  能得到較好的精度，因此本案將使用此方法進行。接著，本案評估小區域之學習模型是否更加準確，因此針對故宮南院場域做三種區域切割，分別考量了繞圈、彎曲行走和來回走之軌跡，如圖 10 所示。除了探討小區域外，也實驗不同重疊程度之軌跡對於類神經網路最終之中值誤差結果。

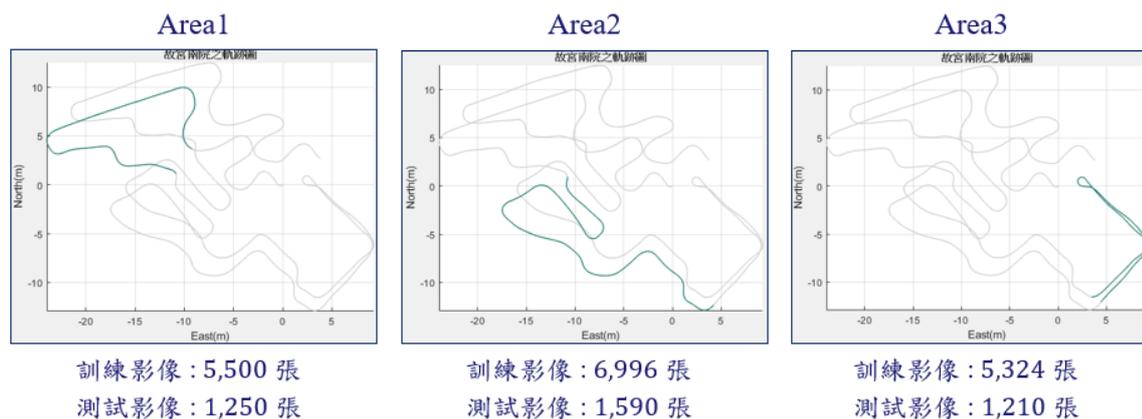


圖 10、繞圈/彎曲行走/來回走之軌跡

每一類神經模型訓練約 4.1 小時，其實驗結果如表 4 所示，可以得知縮小場域範圍能讓整體位置誤差下降約 60% 左右的精度。且無論是繞行環狀的軌跡、曲線彎曲式的軌跡或是重疊式來回行走的軌跡，三種切割區域之間的位置中值誤差沒有太大的起伏。因此本團隊認為在收集影像以及地理位置資訊時，並不需要設計特定的軌跡，測試樣本只需要被包覆在訓練樣本裡即可得到不低的位置精度。圖 11 圖以繞圈的切割區域 Area1 來做為數據集，測試樣本總共 1,250 張影像，黃點為所有測試樣本的位置預測值，圖中顯示測試樣本的位置預測值幾乎貼近真實軌跡。

表 4、不同區域大小對於精度的影響(以故宮為例)

位置中值誤差(m)				誤差在 1 公尺內所占的比例			
Area1	Area2	Area3	All	Area1	Area2	Area3	All
0.15	0.17	0.12	0.42	99.0 %	98.7 %	97.4 %	91.3 %

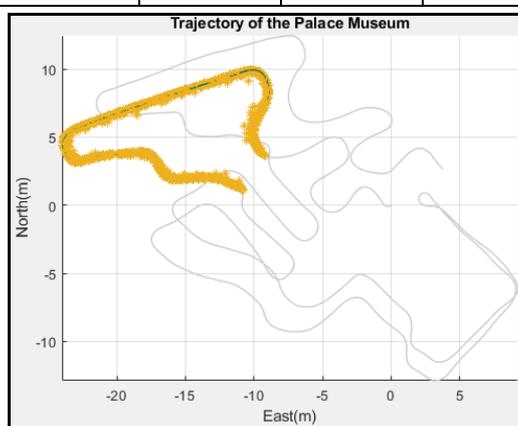


圖 11、Area1 訓練模型之測試結果(黃點為測試影像之位置預測值)

#### 四、結論與建議

隨著智慧型運輸系統(Intelligent Transport System, ITS)的發展，自動駕駛汽車成為未來全新的交通方式，稱高精地圖在自駕車運行具有不可或缺之地位，精進測繪車之高精地圖製圖技術，發展高精地圖自動化生產技術，及建立自駕車群眾外包之高精地圖製圖(含自駕車平台)系統及流程刻不容緩。本案於影像處理方面完成除了車道標線，其餘 7 種類別之 VIA 標註，其中紅綠燈、行人穿越燈、限制標誌、禁止標誌、警

告標誌、指向線、標字(速限)類別已加入模型訓練，而路面速限項目也已完成了 600 張的標註，並更改參數後加入了模型訓練。目前已完成路面速限之模型訓練，接著將進行測試模型的準確度，在模型準確度評估部分，本案預計使用 mAP (Mean Average Precision)來做為評估指標。除此之外，本團隊也完成擬定群眾外包之變異物件辨識方法及輸出格式，後續將實際利用自駕車資料完成六項類別的偵測與精度分析，包含紅綠燈、行人穿越燈、限制標誌、禁止標誌、警告標誌、指向線等，同時驗證本案變異物件辨識流程之可行性。

對於移動裝置室內外智慧製圖技術之工作，本案使用故宮南院數據集進行 PoseNet 之類神經網路的精度測試，藉由設計不同參數設置與影像尺寸來進行實驗，實驗結果表明，比起使用原始 PoseNet 論文的設置，更動影像前處理及損失函數後，其整體精度獲得大大地提升。另外，本案亦探討不同區域大小對於精度的影響，針對故宮南院場域做三種區域切割，分別考量了繞圈、彎曲行走和來回走之軌跡。實驗結果表明，縮小場域範圍能讓整體位置誤差下降約 60%左右的精度。另外，三種切割區域之間的位置中值誤差沒有太大的起伏。後續將選定東南地政事務所作為適地性服務試辦區，確認東南地所的需求與民眾在地所辦理業務的流程，並根據此流程初步勘定架設 Beacon 的位置，並參考地所人員提供的平面圖建立了地所的圖資，做為後續開發之用，最後將根據測試結果進行 APP 開發調整。

## 參考文獻

1. Dabeer, O., Ding, W., Gowaiker, R., Grzechnik, S.K., Lakshman, M.J., Lee, S., Reitmayr, G., Sharma, A., Somasundaram, K., Sukhvasi, R.T., and Wu, X. (2017). An end-to-end system for crowdsourced 3D maps for autonomous vehicles : The mapping component. In 2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), pp. 634-641, IEEE.
2. Jo, K., Kim, C., and Sunwoo, M. (2018). Simultaneous localization and map change update for the high definition map-based autonomous driving car. *Sensors*, 18(9), pp. 3145.
3. Kendall, A., Grimes, M., and Cipolla, R. (2015). PoseNet : A convolutional network for real-time 6-dof camera relocalization. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, pp. 2938-2946.
4. Szegedy, C., Liu, W., Jia, Y., Sermanet, P., Reed, S., Anguelov, D., Erhan, D., Vanhoucke, V., and Rabinovich, A. (2015). Going Deeper with Convolutions. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 1-9.
5. Von Luxburg, U. (2007). A tutorial on spectral clustering. *Statistics and computing*, 17(4), pp. 395-416.